
LE LEMME D'IHARA POUR LES GROUPES UNITAIRES

par

Boyer Pascal

Résumé. — Le résultat principal de ce travail est la preuve de certaines instances de ce que depuis les travaux de Clozel-Harris-Taylor sur Sato-Tate, on appelle le lemme d'Ihara. Ces instances sont liées aux hypothèses restrictives portées par l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke par lequel on localise l'espace des formes automorphes modulo l du groupe unitaire considéré. La stratégie consiste à transférer cet énoncé en une propriété similaire portant sur la cohomologie d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor que l'on montre en prouvant que la cohomologie, localisé en cet idéal maximal, d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor est sans torsion.

Abstract (Ihara's lemma for some unitary groups). — The main result of this paper is the proof of some new instances of the so called Ihara's lemma as it was introduced in their work on Sato-Tate by Clozel-Harris-Taylor. These new cases are linked to the particular hypothesis on the maximal ideal of the Hecke algebra by which we localize the space of automorphic forms modulo l of the unitary group. The strategy consists to go through the same property of genericness of subspace of the localized cohomology of some Kottwitz-Harris-Taylor Shimura variety, which relies on the freeness of the localized cohomology groups of Harris-Taylor's perverse sheaves.

Table des matières

Introduction.....	2
1. Géométrie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor.....	5
1.1. Données de Shimura.....	5
1.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	7
1.3. Faisceau pervers des cycles évanescents.....	9
1.4. Structures entières.....	11

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

2. Cohomologie entière.....	13
2.1. Localisation en un idéal non pseudo-Eisenstein.....	13
2.2. Représentations elliptiques et liberté de la cohomologie.....	15
2.3. Du lemme d'Ihara à la cohomologie.....	19
3. Sur la cohomologie modulo l	21
3.1. Réseaux globaux.....	21
3.2. Réseaux locaux.....	22
3.3. Preuve du lemme d'Ihara.....	23
3.4. Augmentation du niveau.....	25
Références.....	27

Introduction

Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire. Pour \overline{B} une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 munie d'une involution de seconde espèce $*$ et $\beta \in \overline{B}^{*-1}$, on considère le groupe des similitudes \overline{G}/\mathbb{Q} défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$\overline{G}(R) := \{(\lambda, g) \in R^\times \times (\overline{B}^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^{\sharp\beta} = \lambda\}$$

avec $\overline{B}^{op} = \overline{B} \otimes_{F,c} F$ où $c = *|_F$ est la conjugaison complexe et \sharp_β l'involution $x \mapsto x^{\sharp\beta} = \beta x^* \beta^{-1}$. On note \overline{G}_0 le groupe des similitudes associé. Pour $p = uu^c$ un premier décomposé dans E , on a

$$\overline{G}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{w|u} (\overline{B}_v^{op})^\times$$

où w décrit les places de F au dessus de u . On suppose en outre que :

- $\overline{G}_0(\mathbb{R})$ est compact,
- si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé,
- qu'il existe une place v_0 de F au dessus de u telle que $\overline{B}_{v_0} \simeq D_{v_0,d}$ est l'algèbre à division centrale sur le complété F_{v_0} de F à la place v_0 , d'invariant $\frac{1}{d}$.

Soit à présent l un nombre premier distinct de p et S un ensemble fini de premiers de \mathbb{Q} contenant l : on note Spl (resp. Spl^S) l'ensemble des places finies de F (resp. et $p_w := w|_{\mathbb{Q}} \notin S$) telles que p_w est décomposé dans E et le facteur de $\overline{G}(\mathbb{Q}_{p_w})$ correspondant à w soit isomorphe à $GL_d(F_w)$. Soit alors

$$\mathbb{T}_S = \mathbb{Z}_l[T_{w,1}, \dots, T_{w,d} : w \in \text{Spl}^S]$$

l'algèbre de Hecke associée aux opérateurs de Hecke non ramifiés aux places $w \in \text{Spl}^S$. Pour \mathfrak{m} un idéal maximal de \mathbb{T}_S et $w \in \text{Spl}^S$, on note

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_{w,i}}}{\overline{T_{w,i-1}}}, \quad i = 1, \dots, d \right\},$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo l en w associé à \mathfrak{m} , où on a posé $T_{w,0} = 1$.

Les idéaux premiers minimaux de \mathbb{T}_S sont ceux au dessus de l'idéal nul de \mathbb{Z}_l et sont donc en bijection naturelle avec les idéaux premiers de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$. Ainsi pour $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ un tel idéal premier minimal, $(\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)/\tilde{\mathfrak{m}}$ est une extension finie $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ de \mathbb{Q}_l .

À un idéal premier minimal $\tilde{\mathfrak{m}}$ cohomologique est associé une classe d'équivalence proche $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ au sens de [12], i.e. un ensemble fini de représentations automorphes irréductibles Π non ramifiées aux places $w \notin S$ telles que la réduction modulo l de ses paramètres de Satake est le multi-ensemble $S_{\mathfrak{m}}(w)$. On note

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}} : G_F := \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}_l})$$

la représentation galoisienne associée à un tel Π d'après [11] et [12], laquelle est nécessairement bien définie à isomorphisme près d'après le théorème de Cebotarev. Les valeurs propres de Frob_w de la réduction modulo l , $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{F}_l})$ sont alors données par le multi-ensemble $S_{\mathfrak{m}}(w)$. La version du lemme d'Ihara pour \bar{G} est la conjecture suivante.

Conjecture. — (Lemme d'Ihara) Soient

- \bar{U} un sous-groupe ouvert compact de $\bar{G}(\mathbb{A})$ tel que pour toute place $w \in \text{Spl}^S$, sa composante locale \bar{U}_w est le sous-groupe compact maximal $GL_d(\mathcal{O}_w)$,
- $w_0 \in \text{Spl}^S$ et
- \mathfrak{m} un idéal maximal de \mathbb{T}_S tel que $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est absolument irréductible.

Si $\bar{\pi}$ est une sous-représentation irréductible de $\mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A})/\bar{U}^{w_0}, \overline{\mathbb{F}_l})_{\mathfrak{m}}$, où $\bar{U} = \bar{U}_{w_0} \bar{U}^{w_0}$, alors la composante locale $\bar{\pi}_{w_0}$ de $\bar{\pi}$ en w_0 est générique.

Remarque : cette version en dimension supérieure du classique lemme d'Ihara pour GL_2 est due à Clozel-Harris-Taylor dans leur preuve de la conjecture de Sato-Tate. Pour contourner cette conjecture, Taylor inventa, peu après, ce que désormais on appelle « Ihara avoidance », qui lui permit donc de faire l'automorphie nécessaire pour prouver la conjecture de Sato-Tate. Malgré cela l'obtention du lemme d'Ihara soulève toujours un très vif intérêt, cf. par exemple les travaux de Clozel et Thorne [8], ou ceux d'Emerton et Helm [10].

Dans cet article, nous allons prouver cette conjecture sous les conditions restrictives suivantes portant sur \mathfrak{m} .

- (H1) : Il existe une place $v_1 \in \text{Spl}$ telle que la restriction $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, v_1}$ de $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ au groupe de décomposition en v_1 est irréductible,
- (H2) : Il existe $w_1 \in \text{Spl}^S$ tel que $S_{\mathfrak{m}}(w_1)$ ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme $\{\alpha, q_{w_1} \alpha\}$ où q_{w_1} est le cardinal du corps résiduel de F_{w_1} ,
- (H3) : L'image de $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, w_0}$ dans son groupe de Grothendieck, est sans multiplicités.

La stratégie consiste à considérer la cohomologie de la tour de variétés de Shimura $X_{\mathcal{I}}$ associée au groupe des similitudes G où G/\mathbb{Q} est tel que

- $G(\mathbb{A}^\infty) = \bar{G}(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times GL_d(F_{v_0}) \times \prod_{\substack{w|u \\ w \neq v_0}} (\bar{B}_w^{op})^\times$,
- $G(\mathbb{R})$ a pour signatures $(1, d-1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$.

En calculant la cohomologie de X_U à l'aide de la suite spectrale des cycles évanescents à la place v_0 , on construit, proposition 2.3.3, tout d'abord une sous-représentation irréductible

π du localisé $H^{d-1}(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)_\mathfrak{m}$ en \mathfrak{m} de $H^{d-1}(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)$ telle que $\pi^{\infty, v_0} \simeq \bar{\pi}^{\infty, v_0}$. On est ainsi ramener à prouver que π_{w_0} est générique. Pour l'essentiel cette propriété repose sur le fait que, après localisation par \mathfrak{m} , la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor est sans torsion, théorème 2.2.5. Concernant les hypothèses restrictives,

- on utilise tout d'abord (H1) au §3.1, pour montrer que le réseau de la cohomologie entière de la variété de Shimura localisée en \mathfrak{m} , s'écrit comme un produit tensoriel d'un réseau automorphe par un réseau galoisien.
- La contrainte (H2) intervient pour s'assurer que la partie localisée de la cohomologie de toute la variété de Shimura est, d'après [4], sans torsion.
- Enfin (H3) est utilisée pour contrôler la combinatoire des représentations modulo l , cf. le §2.2 et le lemme 3.2.2.

La stratégie de la démonstration permet aussi d'obtenir des énoncés d'augmentation de niveau, lesquels doivent normalement se déduire des travaux de Taylor et de son école. Par exemple dans le cas $d = 2$, supposons qu'il existe $\tilde{\mathfrak{m}}$ tel que

- (a) pour tout idéal premier $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$, la composante locale en w_0 de $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ est non ramifiée,
- (b) qu'il existe un tel idéal premier avec $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \chi_{w_0, 1} \times \chi_{w_0, 2}$ tel que

$$\chi_{w_0, 1} \chi_{w_0, 2}^{-1} = \nu : \alpha \in F_{w_0}^\times \mapsto q_{w_0}^{-\text{val}(\alpha)}$$

- (c) et que l'ordre de q_{w_0} modulo $l \geq 3$ est égal à 2.

De (a), en utilisant la suite spectrale des cycles évanescents à la place w_0 , on en déduit que

$$H^1(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)_\mathfrak{m} = H^1(X_{U, \bar{s}_{w_0}}^{-1}, \Psi(\overline{\mathbb{F}}_l))_\mathfrak{m}$$

où, $\Psi(\overline{\mathbb{F}}_l)$ désigne le complexe des cycles évanescents à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_m$ et $X_{U, \bar{s}_{w_0}}^{-1}$ est la fibre spéciale géométrique de X_U en w_0 privée de ses points supersinguliers. Classiquement cette cohomologie est une induite parabolique et d'après (b) et (c), la seule représentation irréductible non dégénérée sous-quotient de la réduction modulo l de $\chi_{w_0, 1} \times \chi_{w_0, 1} \nu$ est cuspidale et ne peut donc pas être une sous-représentation de $H^1(X_U, \overline{\mathbb{F}}_l)$. Ainsi, si le lemme d'Ihara est vrai, pour \mathfrak{m} vérifiant les points (b) et (c) ci-dessus, le point (a) doit être faux, autrement dit il existe un $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ tel que $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}$ est une représentation de Steinberg tordue par un caractère. En d'autres termes, on a une propriété d'augmentation du niveau.

Nous prouverons un résultat similaire, plus précisément, pour un idéal premier $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$, la réduction modulo l de $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}$ qui ne dépend que de \mathfrak{m} , a un support supercuspidal $\mathcal{S}_{w_0}(\mathfrak{m})$ qui, par hypothèse sur \mathfrak{m} , est sans multiplicité. On décompose alors

$$\mathcal{S}_{w_0}(\mathfrak{m}) = \coprod_{\varrho} \mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$$

selon les classes d'équivalence inertielle ϱ de $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales d'un $GL_{g(\varrho)}(F_{w_0})$ pour $1 \leq g(\varrho) \leq d$. Pour chaque ϱ on note alors

$$l_1(\mathfrak{m}, \varrho) \leq \dots \leq l_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\mathfrak{m}, \varrho)$$

de sorte que $\mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$ puisse s'écrire comme la réunion de $r(\varrho)$ segments de Zelevinsky non liés

$$[\varrho \nu_i^k, \bar{\rho} \nu^{k+l_i(\mathfrak{m}, \varrho)}] = \{\varrho \nu^k, \varrho \nu^{k+1}, \dots, \varrho \nu^{k+l_i(\mathfrak{m}, \varrho)}\}.$$

Proposition. — *Il existe un idéal premier $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ tel que*

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \bigtimes_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho)$$

où Scusp_{w_0} désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielles des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $GL_n(F_{w_0})$ pour $n \geq 1$ et où pour tout $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}$, il existe des représentations irréductibles cuspidales $\pi_1(\varrho), \dots, \pi_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\varrho)$ de $GL_{g(\varrho)}(F_v)$ telles que

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \text{St}_{l_1(\mathfrak{m}, \varrho)}(\pi_1(\varrho)) \times \dots \times \text{St}_{l_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\mathfrak{m}, \varrho)}(\pi_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\varrho)).$$

1. Géométrie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor

1.1. Données de Shimura. — On fixe un nombre premier l relatif aux coefficients dont on prend la cohomologie. Par la suite les différents nombres premiers qui interviendront, seront toujours supposés être distincts de l .

Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ et tel que l est non ramifié dans E . Pour v une place de F , on notera F_v le complété du localisé de F en v , \mathcal{O}_v son anneau des entiers de F_v , ϖ_v une uniformisante et q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

1.1.1. Notation. — On note ν le caractère de F_v^\times défini par $\alpha \mapsto q_v^{-\text{val}(\alpha)}$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*-1}$, on note \sharp_β l'involution $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [11], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F, c} F$. Si x est une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y , $x = \prod_i z_i$ dans F^+ .

Dans [11], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;
- les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier $p = uu^c$ décomposé dans E tel qu'il existe une place v de F au dessus de u telle que

$$(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v).$$

On note abusivement

$$G(\mathbb{A}^{\infty,v}) = G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{\substack{w|p \\ w \neq v}} (B_w^{op})^\times.$$

Remarque : par rapport aux notations de l'introduction, la place v sera, selon les cas, soit v_0 , v_1 ou w_0 .

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^v(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times).$$

1.1.2. Notation. — Soit \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »⁽¹⁾ de $G(\mathbb{A}^\infty)$, de la forme $U^v(m)K_v$. Pour m comme ci-dessus, on a une application

$$m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

1.1.3. Définition. — Pour un tel $I \in \mathcal{I}$, soit

$$X_I \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$$

la variété de Shimura de [11] dite de Kottwitz-Harris-Taylor associée à G .

Remarque : X_I est un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ tel que $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ forme un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats. Quand $m_1 = m'_1$ alors $X_{U^p(m)} \longrightarrow X_{U^p(m')}$ est étale. Ce système projectif est par ailleurs muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$ où $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

1.1.4. Notations. — (cf. [1] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, on note :

- X_{I,s_v} (resp. $X_{I,\bar{s}_v} := X_{I,s_v} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$) la fibre spéciale (resp. géométrique) de X_I en v et X_{I,η_v} (resp. $X_{I,\bar{\eta}_v}$) la fibre générique (resp. géométrique).
- Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}$ (resp. $X_{I,\bar{s}_v}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d-h$. La strate ouverte est en outre « géométriquement induite » au sens où il existe un système projectif $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,1}^{=h}$ de sous-schémas fermés de $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}^{=h}$ muni d'une action par correspondance de $P_{h,d}(F_v)$ tel que

$$X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}^{=h} = X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,1}^{=h} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

1. tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [11] bas de la page 90

1.1.5. Notations. — Nous utiliserons les notations suivantes :

$$i^h : X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\leq h}$$

ainsi que $j^{\leq h} = i^h \circ j^{\geq h}$.

1.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Pour g un diviseur de $d = sg$ et π_v une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$, l'induite parabolique

$$\pi_v \left\{ \frac{1-s}{2} \right\} \times \pi_v \left\{ \frac{3-s}{2} \right\} \times \cdots \times \pi_v \left\{ \frac{s-3}{2} \right\} \times \pi_v \left\{ \frac{s-1}{2} \right\}$$

possède

- un unique quotient irréductible noté $\text{St}_s(\pi_v)$; c'est une représentation de Steinberg généralisée.
- une unique sous-représentation irréductible notée $\text{Speh}_s(\pi_v)$; c'est une représentation de Speh généralisée.

Remarques :

- si π_v est un caractère χ_v de F_v^\times alors $\text{Speh}_s(\chi_v)$ est le caractère de $GL_d(F_v)$ donné par $\chi_v \circ \det$.
- Une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible de $GL_d(F_v)$ sera dite *essentiellement de carré intégrable* si elle est de la forme $\text{St}_s(\pi_v)$ pour un diviseur g de $d = sg$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$.

La correspondance de Jacquet-Langlands locale, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, est une bijection entre les classes d'équivalences des représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable de $GL_d(F_v)$ et les représentations irréductibles du groupe des inversibles $D_{v,d}^\times$ de l'algèbre à division centrale $D_{v,d}$ sur F_v d'invariant $\frac{1}{d}$.

1.2.1. Notation. — On note $\pi_v[s]_D$ la représentation irréductible de $D_{v,d}^\times$ associée à $\text{St}_s(\pi_v^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands locale.

Rappelons que dans [11], les auteurs, via les variétés d'Igusa de première et seconde espèce, associent à toute représentation ρ_v de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$, où $\mathcal{D}_{v,h}$ est l'ordre maximal de $D_{v,h}$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)_1$ sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, 1}^{\leq h}$ dont on note $\mathcal{L}(\rho_v)$ la version « induite » sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\leq h}$. D'après [1] §1.4.2, le système local $\mathcal{L}(\rho_v)_1$ est muni d'une action par correspondances de

$$G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times \mathbb{Z}$$

qui d'après [11] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{F_v, h}^\times$ via

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p, \infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \quad (1.2.2)$$

où

$$G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{F_v, h}^\times,$$

$$- g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$- \delta \in D_{v,h}^\times \text{ est tel que } v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c).$$

Remarque : on prendra l'habitude d'identifier $D_{v,h}^\times / \mathcal{D}_{v,h}^\times$ avec \mathbb{Z} via la norme réduite.

1.2.3. Définitions. — Pour π_v une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $t \geq 1$, on note

$$\mathcal{HT}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, t, \Pi_t)(n) := \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\rho_{v,t})[d - tg] \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$$

où

- \mathbb{L} est la correspondance Langlands sur F_v , à dualité près,
- $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Z}}_l^\times$ est définie par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$,
- $\rho_{v,t}$ est un sous-quotient irréductible quelconque de $(\pi_v[t]_D)_{|\mathcal{D}_{v,tg}^\times}$ où $\mathcal{D}_{v,tg}$ est l'ordre maximal de $D_{v,tg}$;
- $GL_h(F_v)$ agit diagonalement sur Π_t et sur $\mathcal{L}(\pi_v, t) \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$ via son quotient $GL_h(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$,
- le groupe de Weil W_v en v agit diagonalement sur $\mathbb{L}(\pi_v)$ et le facteur $\Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$ via l'application $\deg : W_v \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie les frobenius géométriques sur 1.

Une $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -version entière sera notée $\mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, t, \Pi_t)(n)$ où Γ désigne un réseau stable, par forcément sous la forme d'un produit tensoriel et la version sans Γ désignera une $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -structure quelconque. Enfin on utilisera les notations $HT_{\Gamma,1}(\pi_v, t, \Pi_t)$ pour les versions non induites.

Remarque : $\mathcal{HT}(\pi_v, t, \Pi_t)(n)$ ne dépend pas du choix de $\rho_{v,t}$. On utilisera, comme dans [1], parfois la notation

$$HT(\pi_v, t, \Pi_t)$$

en remplaçant dans la formule précédente $\mathcal{L}(\rho_{v,t})$ par $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)$ où $\pi_v[t]_D$ est vue, par restriction, comme une représentation de $\mathcal{D}_{v,tg}^\times$. En outre en un certain sens il ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de π_v . Précisons cela dans le cas où $\Pi_t = \text{St}_t(\pi_v)$, alors pour $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$, les faisceaux pervers $\mathcal{HT}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v))$ et $\mathcal{HT}(\pi_v \otimes \chi, t, \text{St}_t(\pi_v \otimes \chi))$, munis de leurs actions par correspondances, sont isomorphes.

1.2.4. Notation. — On notera plus simplement

$$\mathcal{HT}(\pi_v, t) := \mathcal{HT}(\pi_v, t, \mathbb{1}_{tg})$$

où $\mathbb{1}_{tg}$ désigne la représentation triviale de $GL_{tg}(F_v)$.

1.2.5. Définition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t \leq s := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, le $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers d'Harris Taylor est, cf. [1] définition 2.1.3,

$$\mathfrak{P}(\pi_v, t) := j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v)).$$

1.2.6. Lemme. — Avec les notations précédentes, si $\rho \otimes \sigma$ est un sous- $GL_d(F_v) \times W_v$ -quotient irréductible de $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l)$ alors

- σ est un constituant irréductible de la réduction modulo l de $\mathbb{L}(\pi_v \otimes \chi_v)$, où χ_v est un caractère non ramifié de F_v , et
- ρ est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l d'une induite de la forme $\mathrm{St}_t(\pi_v \otimes \chi_v) \times \psi_v$ où ψ_v est une représentation irréductible entière de $GL_{d-tg}(F_v)$.

Démonstration. — Le résultat découle, cf. la formule donnée en (1.2.2), de la description des actions. \square

1.3. Faisceau pervers des cycles évanescents. — Rappelons que pour X un \mathbb{F}_p -schéma et $\Lambda = \bar{\mathbb{Q}}_l, \bar{\mathbb{Z}}_l, \bar{\mathbb{F}}_l$, la t -structure usuelle sur la catégorie dérivée $D_c^b(X, \Lambda)$ est définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \ h^k i_x^* A = 0, \ \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \ h^k i_x^! A = 0, \ \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \mathrm{Spec} \kappa(x) \hookrightarrow X$. On note alors ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure et ${}^p\mathcal{H}^i$ les foncteurs cohomologiques associés.

Pour Λ un corps, cette t -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$, on peut munir la catégorie abélienne $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est la sous-catégorie pleine des objets de torsion T (resp. libres F), i.e. tels que $l^N 1_T$ est nul pour N assez grand (resp. $l \cdot 1_F$ est un monomorphisme). Soit alors

$$\begin{aligned} {}^+\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

la t -structure duale de cœur ${}^+\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$.

1.3.1. Définition. — (cf. [5] §1.3) Soit $\mathcal{F}(X, \Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) \cap {}^{p+}\mathcal{C}(X, \Lambda)$ la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur X à coefficients dans Λ .

Pour tout $I \in \mathcal{I}$, le complexe $\Psi_{I, v, \Lambda} := R\Psi_{\bar{\eta}_v, I}(\Lambda)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur X_{I, \bar{s}_v} est alors un objet de $\mathcal{F}(X_{I, \bar{s}_v}, \Lambda)$, i.e. un faisceau pervers libre dit des cycles évanescents. Pour I variant dans \mathcal{I} , on obtient, au sens de la définition 1.3.6 de [1], un W_v -faisceau pervers de Hecke noté $\Psi_{\mathcal{I}, v, \Lambda}$ ou plus simplement $\Psi_{\mathcal{I}, v}$ dans le cas où $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$.

Rappelons, cf. [1] §2.4, que la restriction $\left(\Psi_{\mathcal{I}, v, \Lambda}\right)_{|X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\bar{h}}}$ du faisceau pervers des cycles évanescents à la strate $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\bar{h}}$, est munie d'une action de

$$(D_{v, h}^\times)^0 := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{val} \circ \mathrm{rn} : D_{v, h}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}\right)$$

et de $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$ que l'on voit plongé dans $F_v^\times \subset D_{v, h}^\times$.

1.3.2. Notation. — Pour tout $h \geq 1$, on note $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_l}(h)$ l'ensemble des classes d'équivalence des \mathbb{F}_l -représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$ dont le caractère central est trivial sur $\varpi^\mathbb{Z} \subset K^\times$.

Pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}_l}(h)$, la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{v,d}^\times)$ formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}_l^{nr} \mathcal{D}_{v,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{v,d}^\times}$, est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{v,d}^\times)$ de sorte que toute \mathbb{Z}_l^{nr} -représentation $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$ de $D_{v,d}^\times$ se décompose en une somme directe

$$V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}_l}(h)} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}} \quad (1.3.2)$$

où $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$ est un objet de $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$.

1.3.3. Proposition. — (cf. [11] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [1])

On a un isomorphisme $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h,d-h}(F_v) \times W_v$ -équivariant⁽²⁾

$$\text{ind}_{(D_{v,h}^\times)^0 \varpi_v^\mathbb{Z}}^{D_{v,h}^\times} \left(\mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, \mathbb{Z}_l} \right)_{|X_{\mathcal{I}, \bar{s}} = h} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}_l}(h)} \mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1-i})$$

où $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}_l}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1-i})$ est le système local associé à la $D_{v,h}^\times$ -représentation⁽³⁾ $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^\bullet = \varinjlim \mathcal{U}_{\bar{\tau}, n}^\bullet$ où $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, n}^\bullet$ est le $\bar{\tau}$ -facteur isotypique de la $D_{v,h}^\times$ -représentation admissible $\mathcal{U}_n^\bullet := H^\bullet(\mathcal{M}_{LT,n}^{h/F_v}, \mathbb{Z}_l)$ obtenue comme la cohomologie de la fibre générique géométrique

$$\mathcal{M}_{LT,n}^{h/F_v} := \mathcal{M}_{LT,h,n} \hat{\otimes}_{\hat{F}_v^{nr}} \hat{F}_v$$

du schéma formel de Lubin-Tate représentant les classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies du \mathcal{O}_v -module formel de hauteur h et de dimension 1.

Pour $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ \text{can}_{!,L} \nearrow & & & \searrow \text{can}_{*,L} & \\ p^+ j_! j^* L & \xrightarrow{+} & p j_! j^* L & \xrightarrow{+} & p^+ j_! j^* L & \xrightarrow{+} & p j_* j^* L \end{array}$$

où la ligne du bas est la factorisation canonique de $p^+ j_! j^* L \longrightarrow p j_* j^* L$ et les flèches $\text{can}_{!,L}$ et $\text{can}_{*,L}$ données par adjonction. Rappelons que les flèches aux extrémités (resp. du milieu) de la ligne du bas, sont strictes (resp. est un bimorphisme), i.e. la flèche canonique de la coimage vers l'image est un isomorphisme (resp. la flèche est un monomorphisme et un épimorphisme).

2. Noter le décalage $[d-1]$ dans la définition de $\Psi_{\mathcal{I}, \mathbb{Z}_l}$.

3. La correspondance entre le système indexé par \mathcal{I} et \mathbb{N} est donnée par l'application m_1 de 1.1.2.

Si X est en outre muni d'une stratification $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots \supset X^{\geq d}\}$, en utilisant des notations similaires à celles de 1.1.5, on définit dans [5], une filtration dite de stratification de L

$$0 = \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^2(L) \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{d-1}(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^d(L) = L,$$

où pour $1 \leq r \leq d-1$, on pose $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}(j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L)$. Par construction tous les gradués $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ sont libres. Dans [5] proposition 2.3.3, on construit par ailleurs, de façon fonctorielle, la filtration \mathfrak{S} -exhaustive de stratification de tout objet L de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$

$$0 = \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}}(L) \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}+1}(L) \subset \dots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \dots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-1}-1}(L) = L,$$

dont tous les gradués $\mathrm{grr}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ sont libres et, après tensorisation par $\overline{\mathbb{Q}}_l$, des extensions intermédiaires de systèmes locaux irréductibles.

1.4. Structures entières. — Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques uns des résultats de [6] concernant la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$. La première étape consiste à le décomposer selon ses ϱ -types au sens suivant.

1.4.1. Proposition. — (cf. [6] proposition 3.2.2) *Il existe une décomposition*

$$\Psi_{\mathcal{I},v} \simeq \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

où

- $\mathrm{Scusp}_v(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences inertielles des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductibles supercuspidales de $GL_g(F_v)$;
- $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ est un faisceau pervers de type ϱ au sens où tous les constituants irréductibles de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ sont des extensions intermédiaires de systèmes locaux $\mathcal{HT}(\pi_v, t, \Pi)(n)$ où la réduction modulo l de π_v a pour support supercuspidal un segment relativement à ϱ .

Remarque : on rappelle qu'une représentation irréductible π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est pas un sous-quotient (resp. un quotient) d'une induite parabolique propre. Sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, ces deux notions coïncident et d'après [13] III.5.10, la réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière est irréductible cuspidale, mais pas nécessairement supercuspidale auquel cas son support supercuspidal est un segment.

Un des résultats clefs de [4] concernant la filtration de stratification $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^\bullet(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ est le fait que les morphismes d'adjonction

$$j_!^{=r} j^{=r,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},v}) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},v})$$

sont surjectifs dans ${}^p\mathcal{C}$.

Pour décrire plus précisément les $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},v})$, commençons par quelques rappels sur la réduction modulo l d'une représentation de Steinberg $\mathrm{St}_s(\pi)$, pour π irréductible cuspidale dont la réduction modulo l , notée ϱ , est supercuspidale. Cette réduction n'est en général, pas irréductible mais contient toujours une unique représentation irréductible non dégénérée notée $\mathrm{St}_s(\varrho)$. Si $\epsilon(\varrho)$ est le cardinal de la droite de Zelevinsky de ϱ , on note suivant [14] p.51,

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\mathrm{St}_s(\varrho)$ est cuspidale si et seulement si $s = 1$ ou $m(\varrho)l^k$ pour $k \in \mathbb{N}$: on le note alors

$$\varrho_k := \mathrm{St}_{m(\varrho)l^k}(\varrho), \quad k \in \mathbb{N}$$

et $\varrho_{-1} := \varrho$. La description complète de la réduction modulo l de $\mathrm{St}_s(\pi)$ est donnée dans [3]. Dans [3], on construit des réseaux stables des $\mathrm{St}_s(\pi)$ dits réseaux d'induction. Parmi ceux-ci, il en existe un noté

$$RI_-(\pi, s)$$

dont la réduction modulo l admet comme unique sous-espace irréductible $\mathrm{St}_s(\varrho)$, qui est donc générique.

1.4.2. Définition. — Une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ représentation π irréductible entière et cuspidale dont la réduction modulo l est isomorphe à ϱ_k est dite de ϱ -type k . On note

$$\mathrm{Scusp}_k(\varrho)$$

l'ensemble des classes d'équivalences de ces représentations de $GL_{g_k}(F_v)$ avec donc

$$g_{-1}(\varrho) = g \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq s(\varrho), \quad g_i(\varrho) = m(\varrho)l^i g,$$

où on a noté $s(\varrho)$ la plus grande puissance de l divisant $\frac{d}{m(\varrho)g}$.

Revenons à présent à la description des $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$. Par construction il est à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}^{\geq r}$ nul si g ne divise par r et sinon

$$j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\substack{i=-1 \\ t_i g_i(\varrho)=tg}}^{s(\varrho)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\varrho)} \mathcal{HT}(\pi_v, t_i, \mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)) \left(\frac{1-t_i}{2} \right).$$

Considérons alors la ϱ -filtration naïve de

$$\mathrm{Fil}_{\varrho, s(\varrho), \overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\varrho, -1, \overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) = j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$$

où

$$\mathrm{Fil}_{\varrho, k, \overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \simeq \bigoplus_{\substack{i=k \\ t_i g_i(\varrho)=tg}}^{s(\varrho)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\varrho)} \mathcal{HT}(\pi_v, t_i, \mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)) \left(\frac{1-t_i}{2} \right),$$

ainsi que la filtration associée de $j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$

$$\mathrm{Fil}_{\varrho,k}(\Psi, tg) := \mathrm{Fil}_{\varrho,k,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \cap j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}).$$

Pour $k = -1, \dots, s(\varrho)$, les gradués $\mathrm{gr}_{\varrho,k}(\Psi, tg)$ associés sont alors sans torsion et de ϱ -type k . On filtre à nouveau chacun de ces gradués en séparant, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, les différents $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_k(\varrho)$ et on note

$$(0) = \mathrm{Fil}_{\varrho}^0(\Psi, tg) \subset \mathrm{Fil}_{\varrho}^1(\Psi, tg) \subset \dots \subset \mathrm{Fil}_{\varrho}^r(\Psi, tg) = j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$$

la filtration ainsi obtenue. On considère alors la filtration de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ construite comme suit :

- on prend l'image de

$$j_!^{=tg} \mathrm{Fil}_{\varrho}^1(\Psi, tg) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$$

et on note $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})^1$ le quotient libre ;

- comme $j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})^1 \simeq \left(j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \right) / \mathrm{Fil}_{\varrho}^1(\Psi, tg)$, on prend l'image de

$$j_!^{=tg} \left(\mathrm{Fil}_{\varrho}^2(\Psi, tg) / \mathrm{Fil}_{\varrho,\pi_v}^1(\Psi, tg) \right) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})^1$$

et ainsi de suite.

- On filtre enfin chacune des images considérées à l'aide d'une filtration de stratification exhaustive.

D'après [1], les gradués obtenus sont, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et en utilisant les notations de 1.2.5, de la forme $\mathfrak{P}(\pi_v, t) \left(\frac{s-1-2k}{2} \right)$ pour $k = 0, \dots, s-1$. Par construction et d'après [1], la filtration ci-avant vérifie les propriétés suivantes :

- si deux gradués ne diffèrent, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, que par leur poids, alors celui de plus petit poids possède un indice plus petit que l'autre (cf. [1] ou [5]) ;
- Étant donné un gradué de poids minimal parmi tous les autres gradués qui lui sont, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, isomorphes au poids près, les gradués d'indice strictement plus petit sont
 - soit tous à supports dans une strate de dimension strictement plus petite,
 - soit à support dans la même strate et de ϱ -type inférieur ou égal.
 - Dans le cas de même support et de ϱ -type égal, on peut modifier la filtration précédente pour échanger l'ordre des deux gradués considérés.
- Enfin, d'après le résultat principal de [6], tant que $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor + 1 \leq m(\varrho)$, pour tout π_v de type ϱ , il n'y a à isomorphisme près qu'une notion d'extension intermédiaire, i.e. avec les notations de [4], ${}^p j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}(\pi_v, t, \Pi_t)(n) \simeq {}^{p+} j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}(\pi_v, t, \Pi_t)(n)$.

Remarque : dans la suite les hypothèses faites sur l'idéal \mathfrak{m} feront que les systèmes locaux d'Harris-Taylor considérés, vérifieront tous la condition du dernier tiret ci-avant.

2. Cohomologie entière

2.1. Localisation en un idéal non pseudo-Eisenstein. —

2.1.1. Notations. — Pour $I \in \mathcal{I}$, on note

- $\text{Spl}(I)$ l'ensemble des places w de F telles que
 - w ne divise pas le niveau I et
 - $p_w := w|_{\mathbb{Q}}$ est décomposé dans F et distinct de l , avec

$$G(\mathbb{Q}_{p_w}) \simeq \mathbb{Q}_{p_w}^\times \times GL_d(F_w) \times \prod_{i=2}^r (B_{w_i}^{op})^\times,$$

où $p_w = w \cdot \prod_{i=2}^r w_i$ dans F^+ .

- Pour $i = 0, \dots, d$, on pose

$$T_{w,i} := \text{diag}(\overbrace{p_w, \dots, p_w}^i, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) \times 1 \in GL_d(\mathbb{Q}_{p_w}) \times \mathbb{Z},$$

et on note

$$\mathbb{T}_I := \overline{\mathbb{Z}}_l[T_{w,i} : w \in \text{Spl}(I) \text{ et } i = 1, \dots, d],$$

l'algèbre de Hecke associée à $\text{Spl}(I)$.

- Pour tout $w \in \text{Spl}(I)$, on note

$$S_{\mathfrak{m}}(w) = \left\{ \frac{\overline{T_{w,i}}}{\overline{T_{w,i-1}}} \in \mathbb{T}_I/\mathfrak{m}, i = 1, \dots, d \right\}$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo l en w associé à \mathfrak{m} , i.e. on garde en mémoire la multiplicité des paramètres.

On dit d'un idéal premier minimal $\tilde{\mathfrak{m}}$ de \mathbb{T}_I qu'il est cohomologique s'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation automorphe cohomologique Π de $G(\mathbb{A})$ possédant des vecteurs non nuls fixes sous I et telle que pour tout $w \in \text{Spl}(I)$, les paramètres de Satake de Π_{p_w} sont donnés par les images des $T_w^{(i)} \in K_{\tilde{\mathfrak{m}}} := (\mathbb{T}_I \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)/\tilde{\mathfrak{m}}$, où $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ est une extension finie de \mathbb{Q}_l . Un tel Π n'est pas nécessairement unique mais définit une unique classe d'équivalence proche au sens de [12] que l'on notera $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$. On note

$$\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l} : \text{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_d(\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

la représentation galoisienne associée à un tel Π d'après [11] et [12], laquelle est, d'après le théorème de Cebotarev, définie à isomorphisme sur $K_{\tilde{\mathfrak{m}}}$, i.e. $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}, \overline{\mathbb{Q}}_l} \simeq \rho_{\tilde{\mathfrak{m}}} \otimes_{K_{\tilde{\mathfrak{m}}}} \overline{\mathbb{Q}}_l$.

Étant donné un idéal maximal \mathfrak{m} de \mathbb{T}_I , pour tout idéal premier minimal $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$, la réduction modulo $\varpi_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ de $\rho_{\tilde{\mathfrak{m}}}$, bien définie à semi-simplification près, ne dépend que de \mathfrak{m} , on note $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}} : G_F \longrightarrow GL_d(\bar{\mathbb{F}}_l)$ son extension des scalaires à $\bar{\mathbb{F}}_l$: ses paramètres de Satake modulo l en $w \in \text{Spl}(I)$ sont donnés par le multi-ensemble $S_{\mathfrak{m}}(w)$.

Dans la suite, on fixe un idéal maximal \mathfrak{m} de \mathbb{T}_I qui vérifie une des conditions (1) et (2) suivantes.

- (1) Il existe $w_1 \in \text{Spl}(I)$ tel que $S_{\mathfrak{m}}(w_1)$ ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme $\{\alpha, q_{w_1}\alpha\}$ où q_{w_1} est le cardinal du corps résiduel en w_1 ;
- (2) On a $l \geq d + 2$ et \mathfrak{m} vérifie l'un des deux conditions suivantes :

- soit $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est induit d'un caractère de G_K pour K/F une extension galoisienne cyclique ;
- soit $l \geq d$ et $SL_n(k) \subset \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}(G_F) \subset \bar{\mathbb{F}}_l^\times GL_n(k)$ pour un sous-corps $k \subset \bar{\mathbb{F}}_l$.

2.1.2. Théorème. — (cf. [7]) Pour \mathfrak{m} comme ci-dessus, les localisés $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}}$, en l'idéal \mathfrak{m} des groupes de cohomologie X_I , sont sans torsion.

2.2. Représentations elliptiques et liberté de la cohomologie. — Rappelons que X_I étant propre, pour tout place w de F , on a un isomorphisme

$$H^{d-1+i}(X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_v}, \bar{\mathbb{Z}}_l) \simeq H^i(X_{I,\bar{s}_v}, \Psi_{\mathcal{I},v})$$

qui est $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$ équivariant. En utilisant la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},v}$, on a une suite spectrale qui à partir des groupes de cohomologie des $\mathfrak{P}(\pi_v, t)$ calcule la cohomologie de $X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_v}$. Sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$, l'étude de cette suite spectrale est menée dans [2] et après localisation par \mathfrak{m} , comme les

$$H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$$

sont concentrés en degré 0, cette suite spectrale dégénère clairement en E_1 . Le but de ce paragraphe est de reprendre cette étude sur $\bar{\mathbb{F}}_l$ et de montrer qu'à nouveau les

$$H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l$$

sont concentrés en degré 0, et donc qu'il n'y a pas de torsion dans les $H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_v}, \mathfrak{P}(\pi_v, t))_{\mathfrak{m}}$.

Pour ce faire, rappelons les notations du §1.2 de [2]. Pour tout $t \geq 0$, on note

$$\Gamma^t := \left\{ (a_1, \dots, a_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r) \in \mathbb{N}^r \times \{\pm\}^r : r \geq 1, \sum_{i=1}^r a_i = t \right\}.$$

Un élément de Γ^t sera noté sous la forme $(\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r)$ où pour tout i la flèche au dessus de a_i est \overleftarrow{a}_i (resp. \overrightarrow{a}_i) si $\epsilon_i = -$ (resp. $\epsilon_i = +$). On considère alors sur Γ^t la relation d'équivalence induite par les identifications suivantes :

$$(\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}, \dots) = (\dots, \overleftarrow{a+b}, \dots), \quad (\dots, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \dots) = (\dots, \overrightarrow{a+b}, \dots),$$

et $(\dots, \overleftarrow{0}, \dots) = (\dots, \overrightarrow{0}, \dots)$. On notera $\overrightarrow{\Gamma}^t$ l'ensemble quotient dont les éléments seront notés $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]$.

Remarque : pour $t > 0$, dans toute classe $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k] \in \overrightarrow{\Gamma}^t$, il existe un unique élément, dit réduit, de $(a_1, \dots, a_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r) \in \Gamma^t$ tel que

- pour tout $1 \leq i \leq r$, on ait $a_i > 0$;
- pour tout $1 \leq i < r$, $\epsilon_i \epsilon_{i+1} = -$.

2.2.1. Définition. — À tout représentant réduit $(a_1, \dots, a_r, \epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ d'une classe de $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k] \in \overrightarrow{\Gamma}^t$, on associe

$$\mathcal{S}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_k])$$

comme le sous-ensemble des permutations σ de $\{0, \dots, t-1\}$ telles que pour tout $1 \leq i \leq r$ avec $\epsilon_i = +$ (resp. $\epsilon_i = -$) et pour tout $a_1 + \dots + a_{i-1} \leq k < k' \leq a_1 + \dots + a_i$ alors $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k')$ (resp. $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k')$). Dans le cas où sous les mêmes conditions, on demande inversement $\sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k')$ (resp. $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k')$), l'ensemble obtenu sera noté $\mathcal{S}^{op}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r])$.

2.2.2. Proposition. — (cf. [15] §2) Soit g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_w)$. Il existe une bijection

$$[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r] \in \overrightarrow{\Gamma}^{s-1} \mapsto [\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$$

dans l'ensemble des sous-quotients irréductibles de l'induite

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \dots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

caractérisée par la propriété suivante

$$J_{P_{g,2g,\dots,sg}}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r])} \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(0)\right\} \otimes \dots \otimes \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(s-1)\right\},$$

ou encore par

$$J_{P_{g,2g,\dots,sg}^{op}}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^{op}([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r])} \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(0)\right\} \otimes \dots \otimes \pi\left\{\frac{1-s}{2} + \sigma(s-1)\right\}.$$

Remarque : avec ces notations $\text{St}_s(\pi)$ (resp. $\text{Speh}_s(\pi)$) est $[\overleftarrow{s-1}]$ (resp. $[\overrightarrow{s-1}]$).

2.2.3. Proposition. — (cf. [15]) Soit ψ une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible telle que le support cuspidal de l'induite $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \times \psi$ soit un segment de Zelevinsky $[\pi\{\frac{a}{2}\}, \pi\{\frac{a+s-1}{2}\}]$ contenant strictement $[\pi\{\frac{1-t}{2}\}, \pi\{\frac{t-1}{2}\}]$. Si $a < 1-t$ (resp. si $a+s-1 > t-1$), alors, avec les notations de la proposition 2.2.2, tout sous-espace irréductible de $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \times \psi$ est de la forme $[\dots, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t-1}, \dots]_{\pi\{\frac{1-s-a}{2}\}}$ (resp. $[\dots, \overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \dots]_{\pi\{\frac{1-s-a}{2}\}}$) où le support cuspidal du $\overleftarrow{t-1}$ dans l'écriture ci-avant est égal à celui $[\pi\{\frac{1-t}{2}\}, \pi\{\frac{t-1}{2}\}]$.

2.2.4. Lemme. — Soit π une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(F_w)$ dont le cardinal de la droite de Zelevinsky de sa réduction modulo l est supérieur ou égal à s . Dans ces conditions,

- (i) pour tout $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r] \in \overrightarrow{\Gamma}^{s-1}$, les sous-quotients irréductibles la réduction modulo l des $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$ pour $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]$ décrivant $\overrightarrow{\Gamma}^{s-1}$ sont disjoints deux à deux.
- (ii) Avec les notations de la proposition précédente, tout sous espace irréductible de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t-1}]_\pi \times \psi$ est la réduction modulo l d'une représentation de la forme donnée par la proposition précédente.

Remarque : dans le cas où le cardinal de la droite de Zelevinsky du lemme ci-avant est $> s$, la réduction modulo l de tout $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$ est irréductible. En cas d'égalité, seul $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ admet une réduction modulo l réductible qui est alors de longueur 2 avec un unique constituant cuspidal.

Démonstration. — (i) Par hypothèse sur π , toutes les représentations considérées ont le même support cuspidal et ont donc tous une image non nulle par $J_{P_{g,2g,\dots,sg}}$. Le résultat découle alors directement

- de la commutation des foncteurs de Jacquet avec la réduction modulo l ,
 - du fait que ces réductions modulo l des $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_\pi$ n'admettent aucun sous-quotient irréductible cuspidal sauf éventuellement $[\overleftarrow{s-1}]_\pi$ dans le cas où la droite de Zelevinsky de $r_l(\pi)$ est de cardinal s ,
 - et du fait que les $r_l(\pi)\{\frac{1-s}{2} + k\}$ sont distincts deux à deux pour $0 \leq k < s$ de sorte que l'image par $J_{P_{g,2g,\dots,sg}}$ de $\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \dots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ est sans multiplicité.
- (ii) Le résultat découle de la proposition précédente en utilisant :
- la réduction au cas unipotent de GL_s d'après [14] §IV.6.3;
 - comme la droite de Zelevinsky de la réduction modulo l de π est de cardinal $\geq s$, l'ordre de q modulo l est $> s$,
 - i.e. l est banal relativement à $GL_s(\mathbb{F}_q)$ et qu'alors le bloc unipotent sur $\overline{\mathbb{F}}_l$ est équivalent à celui sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

□

2.2.5. Théorème. — Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de \mathbb{T}_S tel que pour tout i , le $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module $H^i(X_{U,\bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}}$ est sans torsion. On suppose en outre que (H3) l'image de $\bar{\rho}_{\mathfrak{m},w_0}$ dans son groupe de Grothendieck est sans multiplicités. Alors pour tout $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local d'Harris-Taylor $\mathcal{HT}(\pi_{w_0}, t)$, la torsion de $H^i(X_{U,\bar{s}w_0}, {}^p j_{!*} \mathcal{HT}(\pi_{w_0}, t))_{\mathfrak{m}}$ est nulle pour tout i .

Démonstration. — Notons $\text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})$ l'ensemble des classes d'équivalences inertielles des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales du support supercuspidal de la réduction modulo l de la composante locale en w_0 d'une représentation $\Pi \in \Pi_{\mathfrak{m}}$ de la classe d'équivalence proche associée à \mathfrak{m} . La suite spectrale des cycles évanescents localisée en \mathfrak{m} s'écrit

$$H^i(X_{U,\bar{\eta}w_0}, \overline{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \simeq H^i(X_{U,\bar{s}w_0}, \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})} \Psi_{\mathcal{I},\varrho})_{\mathfrak{m}} \simeq \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})} H^i(X_{U,\bar{s}w_0}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho})_{\mathfrak{m}},$$

de sorte que pour tout $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})$ le localisé en \mathfrak{m} de la cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ est concentrée en degré médian et sans torsion.

Soit alors $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}(\mathfrak{m})$, la filtration de stratification exhaustive de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ raffinée par celle de son ϱ -type comme au §1.4, permet de calculer, via une suite spectrale, la cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ localisée en \mathfrak{m} à l'aide de celle des faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t)$ pour π_{w_0} irréductible cuspidale de type ϱ . On raisonne par l'absurde, la stratégie consistant

alors à montrer que le localisé en \mathfrak{m} de la cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ aurait de la torsion, ce qui n'est pas d'après nos hypothèses. Considérons alors t_0 minimal tel qu'il existe $i \neq 0$ pour lequel

$$H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t_0))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l \neq (0).$$

Les hypothèses sur \mathfrak{m} , imposent, d'après le résultat principal de [6] que le dual de Verdier $D(\mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t))$ est isomorphe à $\mathfrak{P}(\pi_{w_0}^\vee, t)$, i.e. les p et $p+$ -extensions intermédiaires sont les mêmes. En particulier quitte à prendre $\pi_{w_0}^\vee$ de type ϱ^\vee , il existe un tel indice $i_0 < 0$ que l'on prendra minimal, i.e.

$$H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l = \begin{cases} (0) & \text{si } t < t_0 \text{ ou } i < i_0 \\ \text{non nul} & \text{si } t = t_0 \text{ et } i = i_0 < 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.2.6, un $GL_d(F_{w_0}) \times W_{w_0}$ constituant irréductible d'un de ces groupes de cohomologie est à prendre parmi ceux de la réduction modulo l de

$$\left([\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_{i-1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overleftarrow{t_0 - 1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overrightarrow{a_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{a_r}]_\pi \times \Upsilon_{w_0} \right) \otimes \mathcal{L}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$$

où

- le $\overleftarrow{\Gamma}$ avant (resp. après) le $\overleftarrow{t_0 - 1}$ est autorisé sous ses deux formes $\overleftarrow{\Gamma}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ si $\sum_{j=1}^{i-1} a_i$ (resp. $\sum_{j=i+1}^r a_i$) est strictement positive : on notera en passant $a_i = t_0 + 1$
- la réduction modulo l de π est de la forme $\varrho\{\frac{\delta_0}{2}\}$,
- Υ_{w_0} est une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière dont la réduction modulo l a un support supercuspidal disjoint de la droite de Zelevinsky de ϱ ,
- si on note $\left\{ \pi\{\frac{\alpha}{2}\}, \pi\{\frac{\alpha}{2} + 1\}, \dots, \pi\{\frac{\alpha}{2} + t_0 - 1\} \right\}$ le support supercuspidal associé à la flèche $\overleftarrow{t_0 - 1}$ dans $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overleftarrow{t_0 - 1}, \dots, \overrightarrow{a_r}]_\pi$ alors $\pi\{\frac{\delta}{2}\}$ appartient à cet ensemble.

Remarque : dans le dernier tiret ci-avant, l'indice k du décalage tel que $\pi\{\frac{\alpha}{2} + k\} = \pi\{\frac{\delta}{2}\}$ correspond aux faisceau pervers $\mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t_0)(\frac{t_0-1}{2} - k)$ dont on considère la cohomologie.

Considérons alors un $\overline{\mathbb{F}}_l[GL_d(F_{w_0}) \times W_{w_0}]$ -module irréductible $(\tau \times \psi_{w_0}) \otimes \mathcal{L}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$ avec δ comme ci-dessus, où :

- ψ_{w_0} est un sous-quotient irréductible quelconque de la réduction modulo l de Υ_{w_0} ,
- τ est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de

$$[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a_{i-1}}, \overleftarrow{\Gamma}, \overleftarrow{t_0 - 1}, \overleftarrow{\Gamma}, \overrightarrow{a_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{a_r}]_\pi$$

le caractérisant, d'après le lemme précédent, parmi tous les autres constituants irréductibles de la réduction modulo l d'un $[\overleftarrow{a}'_1, \dots, \overrightarrow{a}'_{r'}]_\pi$ avec $\sum_{j=1}^{r'} a'_j = \sum_{j=1}^r a_j$.

Montrons que ce constituant irréductible est alors un sous-quotient de $H^{i_0}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{w_0}}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho})_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$, ce qui sera contradictoire et clôturera la preuve. Avec les notations précédentes on considère $k = 0$, i.e. la cohomologie de $\mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t_0)(\frac{t_0-1}{2})$ de sorte que $\delta = \alpha$. Notons $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^k(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \subset \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ les indices de la filtration exhaustive de stratification

considérée plus haut, tels que

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^k(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) = \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^k(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) / \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \simeq \mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t_0)(t-1).$$

Par construction de la filtration et notamment en modifiant l'ordre dans le raffinement par le ϱ -type, on peut supposer que les faisceaux pervers d'Harris-Taylor dans $\mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ sont de la forme $\mathcal{P}(\pi'_{w_0}, t')$ avec $t' > t_0$. Comme précédemment $H^{i_0+1}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{w_0}}, \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ est filtré par des sous-quotients irréductibles de la réduction modulo l de

$$\left([\overleftarrow{a_1}, \dots, \overleftarrow{a_{i-1}}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t'-1}, \overleftarrow{1}, \overrightarrow{a_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{a_r}]_{\pi'} \times \psi_{w_0} \right) \otimes \mathcal{L}(\pi' \{ \frac{\delta'}{2} \})$$

avec $t' > t_0$ et où $\pi' \{ \frac{\delta'}{2} \}$ est une des cuspidales du support cuspidal du $\overleftarrow{t'-1}$ dans l'écriture ci-dessus. On remarque alors que la contrainte $t' > t_0$ ne nous permet jamais de retrouver le τ de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{a_1}, \dots, \overleftarrow{a_{i-1}}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t_0-1}, \overleftarrow{1}, \overrightarrow{a_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{a_r}]_{\pi}$.

En ce qui concerne les $H^{i_0-1}(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{w_0}}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho} / \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^k(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}))_{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$, on raisonne de même :

- pour les constituants $\mathcal{P}(\pi'_{w_0}, t')$ avec $t' > t_0$,
- ceux pour $t' \leq t_0$ étant nuls par minimalité de t_0 et de i_0 .

□

2.3. Du lemme d'Ihara à la cohomologie. — Étant donné un faisceau de Hecke à support dans les points supersinguliers, ses groupes de cohomologie H^i sont nuls pour tout $i \neq 0$. En ce qui concerne son H^0 , rappelons que $X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_0}}^{=d}$ peut s'écrire comme une réunion disjointe de schémas de dimension 0

$$X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_0}}^{=d} = \coprod_{i \in \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)} X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_0},i}^{=d}.$$

Un faisceau de Hecke $\mathcal{F}_{\mathcal{I},i}$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_0},i}^{=d}$ a sa fibre en une tour z_i de points supersinguliers munie d'une action de $\overline{G}(\mathbb{Q}) \times GL_d(F_{v_0})^0$ où $GL_d(F_{v_0})^0$ est le noyau de la valuation du déterminant de sorte que, cf. [1] proposition 5.1.1, en tant que $G(\mathbb{A}^\infty) \simeq \overline{G}(\mathbb{A}^{\infty, v_0}) \times GL_d(F_{v_0})$ -module, on a

$$H^0(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_0},i}^{=d}, \mathcal{F}_{\mathcal{I},i}) \simeq \mathrm{ind}_{\overline{G}(\mathbb{Q})}^{\overline{G}(\mathbb{A}^{\infty, v_0}) \times \mathbb{Z}} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I},i}$$

avec $\delta \in \overline{G}(\mathbb{Q}) \mapsto (\delta^{\infty, v_0}, \mathrm{val} \circ \mathrm{rn}(\delta_{v_0})) \in \overline{G}(\mathbb{A}^{\infty, v_0}) \times \mathbb{Z}$ et où l'action de $g_{v_0} \in GL_d(F_{v_0})$ est donnée par celle de $(g_0^{-\mathrm{val} \det g_{v_0}}, \mathrm{val} \det g_{v_0}) \in GL_d(F_{v_0})^0 \times \mathbb{Z}$ où $g_0 \in GL_d(F_{v_0})$ est un élément fixé tel que $\mathrm{val} \det g_0 = 1$. En outre, cf. [1] corollaire 5.1.2, si $z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I},i}$ est munie d'une action du noyau $(D_{v_0,d}^\times)^0$ de la valuation de la norme réduite qui est compatible à l'action de $\overline{G}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow D_{v_0,d}^\times$, alors en tant que $G(\mathbb{A}^\infty)$ -module, on a

$$H^0(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_0},i}^{=d}, \mathcal{F}_{\mathcal{I},i}) \simeq \mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}^\infty), \Lambda) \otimes_{D_{v_0,d}^\times} \mathrm{ind}_{(D_{v_0,d}^\times)^0}^{D_{v_0,d}^\times} z_i^* \mathcal{F}_{\mathcal{I},i} \quad (2.3.1)$$

2.3.2. Lemme. — Soit $\bar{\pi}$ une sous- $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $\mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A})/U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l)$. On choisit alors une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière π_{v_0} de $GL_g(F_{v_0})$ pour g divisant $d = sg$, telle que

- la réduction modulo l de π_{v_0} , notée ϱ , est supercuspidale, et
- la composante locale $\bar{\pi}_{v_0}$ de $\bar{\pi}$ en v_0 est la réduction modulo l de $\pi_{v_0}[s]_D$.

Alors $\bar{\pi}^{\infty, v_0}$ est une sous-représentation de la réduction modulo l de

$$H^0(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, \mathcal{HT}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(\pi_{v_0}^\vee, s)) = H^0(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, \mathcal{HT}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v_0}^\vee, s)) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l.$$

Remarque : π_{v_0} étant de ϱ -type -1 , on notera que tous les réseaux stables de $\mathcal{HT}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{v_0}^\vee, s)$ sont isomorphes.

Démonstration. — On a $\bar{\pi} \subset \mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A})/U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l)$ et donc $\bar{\pi}^{v_0} \subset \mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A})/U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l) \otimes \bar{\pi}_{v_0}^\vee$. Par ailleurs comme $\mathcal{HT}(\pi_{v_0}^\vee, s)$ est supporté aux points supersinguliers, son H^0 est sans torsion et

$$H^0(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, \mathcal{HT}(\pi_{v_0}^\vee, s)) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l \simeq H^0(X_{U^{v_0}, \bar{s}_{v_0}}, \mathcal{HT}(\pi_{v_0}^\vee, s) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l).$$

Le résultat découle alors directement de la formule (2.3.1). □

2.3.3. Proposition. — Soient

- U un niveau fini et S un ensemble fini de places contenant les places w de F telles que U_w n'est pas maximal ;
- \mathfrak{m} un idéal maximal de \mathbb{T}_S tel qu'il existe $w_1 \in \text{Spl}^S$ tel que $S_{\mathfrak{m}}(w_1)$ ne contient aucun sous-multi-ensemble de la forme $\{\alpha, q_{w_1}\alpha\}$;
- $\bar{\pi}$ une sous- $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $\mathcal{C}^\infty(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A})/U^{v_0}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$.

Alors $\bar{\pi}^{\infty, v_0}$ est une sous- $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$.

Démonstration. — Dans [4], nous avons montré que les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$ étaient sans torsion. De la description de ceux-ci, on en déduit alors que s'il existe i tel que $H^i(X_{U, \bar{s}_{v_0}}, \Psi_{\mathcal{I}, \rho})_{\mathfrak{m}}$ est non nul alors nécessairement la composante locale $\bar{\pi}_{v_0}$ de $\bar{\pi}$ doit être la réduction modulo l de $\pi_{v_0}[s]_D$ où π_{v_0} est une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière de $GL_g(F_{v_0})$ pour $d = sg$, de ϱ -type -1 . Fixons alors une telle représentation π_{v_0} .

Des propriétés de la filtration de stratification exhaustive raffinée par les ϱ -types et en utilisant que π_{v_0} est de ρ -type -1 , on en déduit que $\mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{v_0}, s)(\frac{s-1}{2})$ est un sous-faisceau pervers de $\Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ pour un certain réseau stable Γ . Comme par ailleurs, les hypothèses sur \mathfrak{m} impliquent, cf. le théorème 2.2.5, que le localisé en \mathfrak{m} de la cohomologie d'un gradué quelconque de $\Psi_{\mathcal{I}}$ est sans torsion et concentrée en degré médian, on en déduit que $H^0(X_{U, \bar{s}_{v_0}}, \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{v_0}, s)(\frac{s-1}{2}))$ est un sous-espace de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)$. Si on ne s'intéresse pas à la représentation portée en v_0 , tous les réseaux Γ sont isomorphes, i.e. $\mathfrak{P}(\pi_{v_0}, s)$ est une somme directe finie de $\mathcal{HT}(\pi_{v_0}, t)$ de sorte que le résultat découle alors du lemme précédent.

□

3. Sur la cohomologie modulo l

3.1. Réseaux globaux. — Par hypothèse, il existe $v_1 \in \text{Spl}$ telle que $\bar{\rho}_{\mathfrak{m},v_1}$ est irréductible de sorte que pour toute représentation irréductible $\Pi \in \Pi_{\mathfrak{m}}$, sa composante locale en v_1 est cuspidale et sa réduction modulo l , ϱ est supercuspidale. En particulier on a

$$H^{d-1+i}(X_{U,\bar{\eta}_{v_1}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \simeq H^i(X_{U,\bar{s}_{v_1}}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho}).$$

Comme ϱ est une représentation irréductible supercuspidale, $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ est un système local concentré sur $X_{U,\bar{s}_{v_1}}^{\bar{d}}$ tel que pour tout point supersingulier z

$$\text{ind}_{(D_{v_1,d}^{\times})^0}^{D_{v_1,d}^{\times}} z^* \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_{v_1} \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} \pi_{v_1} \otimes \pi_{v_1}[1]_D \otimes \mathbb{L}(\pi_{v_1}).$$

3.1.1. Proposition. — Soit $\Pi^{\infty} \otimes \mathbb{L}(\Pi_{v_1})$ une sous-représentation irréductible de $H^{d-1}(X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_{v_1}}, \bar{\mathbb{Q}}_l)_{\mathfrak{m}}$. Alors le réseau

$$H^{d-1}(X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_{v_1}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \cap \left(\Pi^{\infty} \otimes \mathbb{L}(\Pi_{v_1}) \right)$$

est un produit tensoriel $\Gamma_G \otimes \Gamma_W$ d'un réseau stable Γ_G de Π^{∞} par un réseau stable Γ_W de $\mathbb{L}(\Pi_{v_1})$.

Démonstration. — Comme la réduction modulo l de $\Pi_{v_1} \otimes \Pi_{v_1}[1]_D \otimes \mathbb{L}(\Pi_{v_1})$ est irréductible, il ne possède, à isomorphisme près, qu'un unique réseau stable de sorte que

$$\Gamma_{GDW} := \left(\text{ind}_{(D_{v_1,d}^{\times})^0}^{D_{v_1,d}^{\times}} z^* \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \right) \cap \left(\Pi_{v_1} \otimes \Pi_{v_1}[1]_D \otimes \mathbb{L}(\Pi_{v_1}) \right)$$

est isomorphe au produit tensoriel $\Gamma_G \otimes \Gamma_D \otimes \Gamma_W$ des réseaux stables de respectivement Π_{v_1} , $\Pi_{v_1}[1]_D$ et $\mathbb{L}(\Pi_{v_1})$. Revenons au calcul de la cohomologie de X_U via la suite spectrale des cycles évanescents : on a

$$H^{d-1+i}(X_{\mathcal{I},\bar{\eta}_{v_1}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \simeq H^i(X_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_1}}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho})$$

et d'après (2.3.1)

$$\begin{aligned} H^0(\bar{X}_{\mathcal{I},\bar{s}_{v_1},i}^{\bar{d}}, \Psi_{\mathcal{I},\varrho}) &\simeq \mathcal{C}^{\infty}(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A}^{\infty}), \Lambda) \otimes_{D_{v_1,d}^{\times}} \left(\text{ind}_{(D_{v_1,d}^{\times})^0}^{D_{v_1,d}^{\times}} z^* \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \right) \\ &\simeq \mathcal{C}^{\infty}(\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{G}(\mathbb{A}^{\infty}), \Lambda) \otimes_{D_{v_1,d}^{\times}} (\Gamma_G \otimes \Gamma_D \otimes \Gamma_W), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

3.2. Réseaux locaux. — Soit comme dans l'introduction un idéal maximal \mathfrak{m} de \mathbb{T}_S vérifiant les hypothèses (H2) et (H3) de sorte qu'en particulier l'image de $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, w_0}$ dans son groupe de Grothendieck est sans multiplicités. On écrit le support supercuspidal $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ associé à $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}, w_0}$ par la correspondance de Langlands, sous la forme

$$\mathcal{S}(\mathfrak{m}) = \coprod_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$$

où Scusp_{w_0} désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielles des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales d'un $GL_{g(\varrho)}(F_{w_0})$ pour $1 \leq g(\varrho) \leq d$. Pour chaque ϱ on note alors

$$l_1(\mathfrak{m}, \varrho) \geq \dots \geq l_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\mathfrak{m}, \varrho)$$

de sorte que $\mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$ puisse s'écrire comme la réunion de $r(\mathfrak{m}, \varrho)$ segments de Zelevinsky non liés

$$[\varrho\nu^{k_i}, \varrho\nu^{k_i+l_i(\cdot, \varrho)}] = \{\varrho\nu^{k_i}, \varrho\nu^{k_i+1}, \dots, \varrho\nu^{k_i+l_i(\mathfrak{m}, \varrho)}\}.$$

3.2.1. Lemme. — Soit $\mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t)$ une $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -structure entière d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor tel qu'il existe i vérifiant

$$H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t))_{\mathfrak{m}} \neq (0).$$

Alors

- (i) soit il existe $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}$ tel que $\mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$ est un segment, i.e. $r(\mathfrak{m}, \varrho) = 1$ et alors
 - soit $r_l(\pi_{w_0}) \sim \varrho$ avec $t = l_1(\mathfrak{m}, \varrho)$,
 - soit $t = 1$ et $r_l(\pi_{w_0})$ est cuspidale de support supercuspidal un segment de longueur $l_1(\mathfrak{m}, \varrho)$ associé à ϱ .
- (ii) soit $r_l(\pi_{w_0})$ est supercuspidal noté ϱ avec $t < l_1(\mathfrak{m}, \varrho) + \dots + l_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\mathfrak{m}, \varrho)$ et alors le réseau stable du système local $j^{=tg, *} \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t)$ est un produit tensoriel $\Gamma_G \otimes \Gamma_D \otimes \Gamma_W$ d'un réseau stable Γ_G (resp. Γ_D , resp. Γ_W) de $\text{St}_t(\pi_{w_0})$ (resp. de $\mathcal{HT}(\pi_{w_0}, t)$, resp. de $\mathbb{L}(\pi_{w_0})$).

Démonstration. — Notons tout d'abord que, d'après 2.2.5, les $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t))_{\mathfrak{m}}$ étant sans torsion, s'il est non nul alors $t \leq \max\{l_1(\mathfrak{m}, \varrho), \dots, l_{r(\mathfrak{m}, \varrho)}(\mathfrak{m}, \varrho)\}$. Par ailleurs si le support supercuspidal de la réduction modulo l de $\text{St}_t(\pi_{w_0})$ n'est pas égal à toute la droite de Zelevinsky d'une supercuspidale alors cette réduction modulo l est irréductible tout comme $\pi_{w_0}[t]_D$ et $\mathbb{L}(\pi_{w_0})$. Dans ce cas tous les réseaux stables de $j^{=tg, *} \mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t)$ sont isomorphes et donc isomorphes à un produit tensoriel de réseaux stables. Enfin la seule alternative à (ii) est celle décrite par (i). \square

Soit désormais $\bar{\pi}$ un sous-quotient irréductible de $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}) / U^{v_0}, \overline{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$. On écrit sa composante locale en w_0 sous la forme $\bar{\pi}_{w_0} \simeq \times_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \bar{\pi}(\varrho)$ où le support supercuspidal de $\bar{\pi}(\varrho)$ est $\mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$.

3.2.2. Lemme. — Avec les notations précédentes, soit $\pi'(\varrho_0)$ un sous-quotient de la réduction modulo l d'une représentation de la forme

$$[\cdots, \overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \cdots]_{\pi'_{w_0}} \times \psi, \quad (\text{resp. } [\cdots, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t-1}, \cdots]_{\pi'_{w_0}} \times \psi)$$

où ψ est une représentation quelconque de sorte que la réduction modulo l de la représentation ci-avant ait pour support supercuspidal $\mathcal{S}_{\varrho_0}(\mathbf{m})$. On note $\varrho_0\{\delta\}$ la cuspidale à l'extrémité droite de $\overrightarrow{1}$ (resp. de $\overleftarrow{1}$) dans l'écriture précédente. Alors pour tout faisceau pervers $\mathfrak{P}(\pi_{w_0}, t')(\frac{1-t'+2k}{2})$ pour $0 \leq k \leq t' - 1$, et pour tout réseau stable, la réduction modulo l de $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t')(\frac{1-t'+2k}{2}))_{\mathbf{m}}$ n'admet pas un sous-espace de la forme

$$\left(\bigtimes_{\varrho_0 \neq \varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \bar{\pi}(\varrho) \right) \times \pi'(\varrho_0) \times \mathbb{L}(\varrho_0\{\delta\}).$$

Démonstration. — D'après 2.2.5, les $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t')(\frac{t'-1-2k}{2}))_{\mathbf{m}}$ sont sans torsion, de sorte que leurs réduction modulo l se calcule à partir de la description de la $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -cohomologie donnée dans [2]. En particulier pour obtenir $\mathbb{L}(\varrho_0\{\delta\})$, il faut que la réduction modulo l de π_{w_0} soit dans la droite de Zelevinsky de ϱ_0 . Plus précisément rappelons que, d'après [2], la $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -cohomologie de $\mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t')(\frac{t'-1}{2})$ est de la forme $(\text{St}_{t'}(\pi_{w_0}\{\alpha\}) \times ?) \otimes \mathbb{L}(\pi_{w_0}\{\frac{1-t'}{2} + \alpha\})$, autrement dit l'action galoisienne fixe la cuspidale « à gauche » du support cuspidal $\left\{ \pi_{w_0}\{\frac{1-t'}{2} + \alpha\}, \cdots, \pi_{w_0}\{\frac{t'-1}{2} + \alpha\} \right\}$ de $\text{St}_{t'}(\pi_{w_0}\{\alpha\})$. On utilise alors l'hypothèse sur \mathbf{m} que le support supercuspidal de $\mathcal{S}(\mathbf{m})$ est sans multiplicité.

- Pour $k > 0$, il découle de ce qui précède que la réduction modulo l de $[\cdots, \overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{1}, \cdots]_{\pi'_{w_0}}$ doit être obtenu comme un sous-quotient de la réduction modulo l de $[\cdots, \overleftarrow{t'-1}, \cdots]_{\psi_{w_0}}$ où désormais la supercuspidale $\varrho_0\{\delta\}$ est dans le support cuspidal de la partie $\overleftarrow{t'-1}$ ce qui n'est pas.
- Pour $k = 0$, d'après le lemme précédent $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_{\Gamma}(\pi_{w_0}, t')(\frac{t'-1}{2}))_{\mathbf{m}}$ s'écrit comme une induite $[\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_{w_0}\{\alpha\}} \times \psi$ où $\varrho_0\{\delta\}$ est la supercuspidale « à gauche » du support de la réduction modulo l de $[\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_{w_0}\{\alpha\}}$. Mais alors, d'après le lemme 2.2.4, un sous-espace irréductible de la réduction modulo l d'un tel groupe de cohomologie est nécessairement de la forme $[\cdots, \overleftarrow{1}, \cdots]_{\varrho_0} \times \psi'$ où $\varrho_0\{\delta\}$ est la cuspidale « à droite » de $\overleftarrow{1}$.

Le cas respectif se traite de manière strictement similaire. □

3.3. Preuve du lemme d'Ihara. — Soit \mathbf{m} un idéal maximal de \mathbb{T}_S vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) de l'introduction. On reprend les notations du §3.2 avec $r(\mathbf{m}, \varrho)$ et les $l_i(\mathbf{m}, \varrho)$ pour $i = 1, \cdots, r(\mathbf{m}, \varrho)$.

3.3.1. Lemme. — Dans le cas (i) du lemme 3.2.1, i.e. avec $r(\mathbf{m}, \varrho) = 1$, pour π_{w_0} une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_{w_0})$ dont la réduction modulo l est ϱ , on

note $\mathfrak{P}_\Gamma(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))(\frac{1-l_1(\mathbf{m}, \varrho)}{2})$ le réseau du faisceau pervers d'Harris-Taylor donnée par la filtration de stratification exhaustive de $\Psi_{\mathcal{I}, w_0}(\overline{\mathbb{Z}}_l)$. Si $H^0(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))_{\mathbf{m}})$ est non nul, alors tout sous-espace irréductible de sa réduction modulo l est de la forme $\bar{\pi}_\varrho \times \bar{\pi}^\varrho$ où

- $\bar{\pi}_\varrho$ est une représentation irréductible générique de support supercuspidal un segment de Zelevinsky relatif à ϱ et
- $\bar{\pi}^\varrho$ a un support supercuspidal disjoint de la droite de Zelevinsky associée à ϱ .

Démonstration. — Dans le cas où la réduction modulo l de $\text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)}(\pi_{w_0})$ est irréductible, elle est générique et le résultat est immédiat. Le seul cas à traiter est celui où cette réduction modulo l est de longueur 2 avec un unique constituant générique, noté ϱ_0 au §1.4. Il s'agit alors de montrer que le réseau stable de $\mathfrak{P}_\Gamma(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))(\frac{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}{2})$ est un produit de réseaux stables et que celui sur $\text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)}(\pi_{w_0})$ est tel que sa réduction modulo l admet la générique comme unique sous-espace irréductible.

Pour ce faire, rappelons que d'après le résultat principal de [4], le faisceau pervers entier $\mathfrak{P}_\Gamma(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))(\frac{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}{2})$ s'obtient aussi en considérant la filtration de stratification exhaustive de $j_1^{=g} \mathcal{HT}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi_{w_0}, 1, \pi_{w_0})$ dont la structure entière est unique à isomorphisme près et donc sous la forme d'un produit tensoriel. La structure entière cherchée se déduit alors de l'étude de la suite spectrale calculant la fibre en un point géométrique de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}^{=l_1(\mathbf{m}, \varrho)}$ du faisceau de cohomologie $h^{l_1(\mathbf{m}, \varrho)g-d} j_1^{=g} \mathcal{HT}(\pi_{w_0}, 1, \pi_{w_0})$, laquelle est trivialement nulle. Dans [4], on montre que cette suite spectrale est sans torsion de sorte qu'on peut la lire sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ telle qu'elle est décrite dans [1]. En particulier la structure entière de $\mathfrak{P}_\Gamma(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))(\frac{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}{2})$ se lit dans le faisceau de cohomologie d'indice $l_1(\mathbf{m}, \varrho)g-d$ de l'extension intermédiaire de $\mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1, \Pi)$ où $\Pi = \pi_{w_0} \{ \frac{2-l_1(\mathbf{m}, \varrho)}{2} \} \times \text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}(\pi_{w_0} \{ \frac{1}{2} \})$ et où le réseau Γ' est un produit tensoriel. Son faisceau de cohomologie d'indice $l_1(\mathbf{m}, \varrho)g-d$ est alors l'induite parabolique d'un réseau produit tensoriel de $\mathcal{HT}(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho), 1) \otimes \text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}(\pi_{w_0} \{ \frac{1}{2} \}) \otimes \mathbb{L}(\pi_{w_0})$, à des décalages par le poids près. Comme tous les réseaux stables de $\mathcal{HT}(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho), 1)$ sont isomorphes et donc sous la forme d'un produit tensoriel, on en déduit que le réseau de $\mathfrak{P}_\Gamma(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))(\frac{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}{2})$ est aussi un produit tensoriel.

Enfin le réseau stable associé à $\text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)}(\pi_{w_0})$ doit être tel que la flèche

$$\pi_{w_0} \{ \frac{2-l_1(\mathbf{m}, \varrho)}{2} \} \times \text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)-1}(\pi_{w_0} \{ \frac{1}{2} \}) \longrightarrow \text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)}(\pi_{w_0})$$

soit surjective, ce qui impose, cf. aussi [3], que l'unique générique, isomorphe à la cuspidale ϱ_0 , de la réduction modulo l de $\text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)}(\pi_{w_0})$ ne peut pas être un quotient irréductible de la réduction modulo l du réseau stable et que donc il en est l'unique sous-espace irréductible. \square

Remarque : dans loc. cit., le réseau stable de $\text{St}_{l_1(\mathbf{m}, \varrho)}(\pi_{w_0})$ construit dans la preuve précédente, est appelé réseau d'induction et noté $RI_-(\pi_{w_0}, l_1(\mathbf{m}, \varrho))$, cf. aussi le début du §1.4.

Considérons une sous-représentation irréductible $\bar{\pi}$ de $\mathcal{C}^\infty(\overline{G}(\mathbb{Q}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}) / \overline{U}^{w_0}, \overline{\mathbb{F}}_l)_m$ de sorte que d'après les propositions 2.3.3 et 3.1.1, $\bar{\pi}^{\infty, v_0} \otimes \mathbb{L}(\bar{\pi})$ est une sous- $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \overline{\mathbb{F}}_l)_m$.

Supposons que $\bar{\pi}_{w_0}$ n'est pas générique, de sorte qu'elle s'obtient comme un sous-quotient de la réduction modulo l d'une représentation de la forme $[\cdots, \overleftarrow{a}, \overrightarrow{b}, \cdots]_{\pi_{w_0}} \times \psi$ avec $b > 0$ et où le support supercuspidal de $r_l(\psi)$ n'est pas lié à celui de $[\cdots, \overleftarrow{a}, \overrightarrow{b}, \cdots]_\varrho$ où $\varrho = r_l(\pi_{w_0})$. Ainsi il existe une représentation irréductible supercuspidale $\varrho\{\delta\}$ du support supercuspidal de la réduction modulo l de $[\cdots, \overleftarrow{a}, \overrightarrow{b}, \cdots]_{\pi_{w_0}}$ telle que

$$[\cdots, \overleftarrow{a}, \overrightarrow{b}, \cdots]_\varrho \times r_l(\psi) \otimes \mathbb{L}(\varrho\{\delta\})$$

a un sous-espace irréductible qui est un sous-espace de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \overline{\mathbb{F}}_l)_m$. En utilisant une filtration de stratification exhaustive du faisceau pervers des cycles évanescents en w_0 , et comme la cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor est sans torsion, cette représentation est un sous-espace irréductible d'un $H^0(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_\Gamma(\pi'_{w_0}, t)(\frac{1-t+2k}{2}))_m \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ avec $0 \leq k \leq t-1$. Or ce dernier espace est de la forme $r_l(\text{St}_t(\pi'_{w_0}\{\delta+k\})) \times \psi' \otimes \mathbb{L}(\varrho\{\delta\})$ où le support supercuspidal de $r_l(\text{St}_t(\pi'_{w_0}\{\delta+k\}))$ est contenu dans celui de $[\cdots, \overleftarrow{a}, \overrightarrow{b}, \cdots]_\varrho$. Si ces supports supercuspidaux sont égaux, et comme d'après le lemme précédent $r(\mathfrak{m}, \varrho) > 1$, on en déduit que la réduction modulo l de $\text{St}_t(\pi'_{w_0}\{\delta+k\})$ est irréductible et est donc nécessairement générique, ce qui ne convient pas. Ainsi donc, d'après le lemme 2.2.4, il existe une sous-représentation irréductible de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \overline{\mathbb{F}}_l)_m$ dont la composante en w_0 est de la forme

$$\left(\bigtimes_{\varrho_0 \neq \varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \bar{\pi}(\varrho) \right) \times \pi'(\varrho_0) \times \mathbb{L}(\varrho_0\{\delta'\})$$

avec $\pi'(\varrho_0)$ comme dans le lemme 3.2.2 et où $\varrho_0\{\delta'\}$ est une supercuspidale du support de la partie $\overleftarrow{t}-1$ dans l'écriture de $\pi'(\varrho_0)$. Or d'après la proposition 3.1.1,

$$\left(\bigtimes_{\varrho_0 \neq \varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \bar{\pi}(\varrho) \right) \times \pi'(\varrho_0) \times \mathbb{L}(\varrho_0\{\delta\})$$

où $\varrho_0\{\delta\}$ est la cuspidale de l'extrémité droite de $\overrightarrow{1}$ (resp. $\overleftarrow{1}$) dans l'écriture précédente, doit aussi être un sous-espace irréductible de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{v_0}}, \overline{\mathbb{F}}_l)_m$, et donc, via la filtration de stratification exhaustive, d'un $H^i(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_{w_0}}, \mathfrak{P}_\Gamma(\pi_{w_0}, t')(\frac{1-t'+2k}{2}))_m$ pour $0 \leq k \leq t'-1$, ce qui n'est pas d'après le lemme 3.2.2.

3.4. Augmentation du niveau. — On reprend les notations précédentes,

$$\mathcal{S}_{w_0}(\mathfrak{m}) = \coprod_{\varrho} \mathcal{S}_{\varrho}(\mathfrak{m})$$

où ϱ décrit les classes d'équivalence inertielles de $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales d'un $GL_{g(\varrho)}(F_{w_0})$ pour $1 \leq g(\varrho) \leq d$. Pour chaque ϱ on note

$$l_1(\varrho) \leq \cdots \leq l_{r(\varrho)}(\varrho)$$

de sorte que $S_\varrho(\mathfrak{m})$ puisse s'écrire comme la réunion de $r(\varrho)$ segments de Zelevinsky non liés

$$[\varrho\nu_i^k, \bar{\rho}\nu^{k+l_i(\varrho)}] = \{\varrho\nu^k, \varrho\nu^{k+1}, \dots, \varrho\nu^{k+l_i(\varrho)}\}.$$

3.4.1. Proposition. — *Il existe un idéal premier $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ tel que*

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0} \simeq \bigtimes_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho)$$

où pour tout $\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}$, il existe des représentations irréductibles cuspidales $\pi_1(\varrho), \dots, \pi_{r(\varrho)}(\varrho)$ de $GL_{g(\varrho)}(F_v)$ telles que

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho) \simeq \text{St}_{l_1(\varrho)}(\pi_1(\varrho)) \times \dots \times \text{St}_{l_{r(\varrho)}(\varrho)}(\pi_{r(\varrho)}(\varrho)).$$

Démonstration. — On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un ϱ_0 pour lequel aucun des idéaux premiers contenus dans \mathfrak{m} ne vérifie la conclusion de la proposition. Soit alors un idéal premier $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$: le facteur $\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho_0)$ est de la forme

$$\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}, w_0}(\varrho_0) \simeq \text{St}_{l_1(\varrho_0)}(\pi_1(\varrho_0)) \times \dots \times \text{St}_{l_k(\varrho_0)}(\pi_k(\varrho_0)) \times \text{St}_{l'_1}(\pi'_1(\varrho_0)) \times \dots \times \text{St}_{l'_r}(\pi'_r(\varrho_0)),$$

avec $l_{k+1}(\varrho_0) > l'_1 \geq \dots \geq l'_r$. On choisit $\tilde{\mathfrak{m}}$ de sorte que la partition $(l_1(\varrho_0) \geq \dots \geq l_k(\varrho_0) \geq l'_1 \geq \dots \geq l'_r)$ ainsi obtenue, soit maximale au sens de l'ordre de Bruhat.

La réduction modulo l de $H^{d-1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_{\mathfrak{m}} \cap (\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}^\infty \otimes \mathbb{L}(\Pi_{\tilde{\mathfrak{m}}}))$ fournit alors, d'après la proposition 3.1.1, un sous-espace de $H^{d-1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$ de la forme $\bar{\pi}^\infty \otimes \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ avec $\bar{\pi}^\infty$ irréductible de composante locale $\bar{\pi}_{w_0}$ en w_0 s'écrivant sous la forme $\bar{\pi}_{w_0} = \bigtimes_{\varrho \in \text{Scusp}_{w_0}} \bar{\pi}_{w_0, \varrho}$ avec

$$\bar{\pi}_{w_0, \varrho_0} \simeq \left(\text{St}_{l_1(\varrho_0)}(\varrho_0\nu^{\delta_1}) \times \dots \times \text{St}_{l_k(\varrho_0)}(\varrho_0\nu^{\delta_k}) \times \bar{\pi}_1 \times \dots \times \bar{\pi}_t \right),$$

où $\bar{\pi}_1 \times \dots \times \bar{\pi}_t$ est un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de $\text{St}_{l'_1}(\pi'_1(\varrho_0)) \times \dots \times \text{St}_{l'_r}(\pi'_r(\varrho_0))$.

Remarque : par définition des $l_i(\varrho)$ et comme $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ est sans multiplicité, la réduction modulo l de $\text{St}_{l_1(\varrho_0)}(\varrho_0\nu^{\delta_1}) \times \dots \times \text{St}_{l_k(\varrho_0)}(\varrho_0\nu^{\delta_k})$ est irréductible, tout comme $\bar{\pi}_{w_0, \varrho_0}$.

La cohomologie étant concentrée en degré médian et sans torsion, on en déduit que $H^{d-1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$ admet un sous espace de la forme $r_l(\Pi^{\infty, w_0}) \otimes \pi_{w_0} \otimes \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$. Considérons alors une filtration

$$\text{Fil}_0(\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}) \subset \dots \subset \text{Fil}_r(\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}) = \bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$$

dont les gradués sont irréductibles et donc de la forme $\varrho\nu^k$. Par hypothèse, tous les gradués ont des poids distincts modulo l , ce qui permet de parler du gradué associé à $\varrho\nu^k$.

Avec les notations précédentes, pour $i = 1, \dots, t$, soit α_i tel que le support supercuspidal de la réduction modulo l de $\text{St}_{l'_i}(\pi'_i(\varrho))$ est celui du segment $[\varrho\nu^{\alpha_i}, \varrho\nu^{\alpha_i+l'_i-1}]$. Considérons le gradué $\text{gr}_k(\bar{\rho}_{\mathfrak{m}})$ associé à $\varrho\nu^{\alpha_1}$. On note $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}, k-1}$ l'image de $r_l(\Pi^{\infty, w_0}) \otimes \pi_{w_0} \otimes \text{Fil}_{k-1}(\bar{\rho}_{\mathfrak{m}})$ et $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}, /k}$ le quotient $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}} / H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}, k-1}$. On a par ailleurs une filtration

$$\text{Fil}^\bullet(H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}})$$

obtenue à partir de la filtration de stratification exhaustive de $\Psi_{\mathcal{I}, \varrho}$ et dont les gradués sont la réduction modulo l de la cohomologie d'un réseau stable d'un $HT(\pi_{w_0}, t, \text{St}_t(\pi_{w_0}))(\frac{1-s+2k}{2})$ pour π_{w_0} de ϱ -type. Cette filtration induit alors une filtration $\text{Fil}^\bullet(H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m},/k})$ de $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m},/k}$. Comme par hypothèse, $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est sans multiplicités, ces gradués sont, en tant que $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation de W_v , isotypiques pour un $\varrho\nu^\alpha$ avec des α distincts pour chacun de ces gradués. En particulier l'image de $\text{gr}_k(\bar{\rho}_{\mathfrak{m}})$ se factorise par un seul de ces gradués et on en déduit que $\bar{\pi}_1 \times \cdots \times \bar{\pi}_t$ est un sous-espace d'une induite de la forme $\text{St}_{l'_1}(\varrho\nu^{\alpha_1 + \frac{l'_1-1}{2}}) \times \bar{\pi}$. Par hypothèse il existe un indice i' tel que le support supercuspidal de la réduction modulo l de $\text{St}_{l'_i}(\pi'_{i'}(\varrho))$ est lié à celui de $\text{St}_{l'_1}(\pi'_1(\varrho))$ de sorte que d'après le lemme 2.2.4, $H^{d-1}(X_{U, \bar{\eta}_{w_0}}, \bar{\mathbb{F}}_l)_{\mathfrak{m}}$ admettrait un sous-espace non dégénéré (comme dans le lemme 3.2.2), ce qui n'est pas d'après la version du lemme d'Ihara prouvée au paragraphe précédent.

□

Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [4] P. Boyer. La cohomologie des espaces de lubin-tate est libre. *soumis*, 2013.
- [5] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [6] P. Boyer. Faisceaux pervers entiers d'harris-taylor. *preprint*, 2015.
- [7] P. Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *preprint*, 2015.
- [8] L. Clozel and J. Thorne. Level-raising and symmetric power functoriality, i. *Compositio Mathematica*, 150, No. 5 :729–748, 2014.
- [9] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [10] M. Emerton and D. Helm. The local langlands correspondence for $\text{Gl}(n)$ in families. *Ann. Sci. E.N.S.* (4), 47 :655–722, 2014.
- [11] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [12] R. Taylor and T. Yoshida. Compatibility of local and global Langlands correspondences. *J.A.M.S.*, 20 :467–493, 2007.
- [13] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

- [14] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [15] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

BOYER PASCAL • *E-mail* : `boyer@math.univ-paris13.fr`, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25